является η-виртуальным нормально оснащающим полем распределения $T(M_m)$. Ограничение на поверхности любого поля, нормально оснащающего распределение η, и построенное нами η-виртуальное поле определяют инвариантное нормально оснащающее поле поверхности M_m в $\mathring{M}_{n+1}(\varphi\xi\eta)$.

Библиографический список

I. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1979.Т.9.247с.

2. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. $(f\xi\eta\rho)$-структура на дифференцируемых многообразиях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1975.Т.7.С.5-22.

3. Б а л а з ю к Т.Н., О с т и а н у Н.М. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. IУ. Подмногообразия коразмерности I в многообразиях почти комплексной структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1983.Т.15.С.127-164.

4. О с т и а н у Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I//Тр.геометр. семинара/ВИНИТИ.М., 1971.Т.3.С.49-94.

5. А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М., 1974.Т.5.С.169-194.

6. П о л я к о в Н.Д. Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. III. $N(\sigma)$-антиинвариантные подмногообразия в многообразии почти контактной структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ. М., 1982.Т.13.С.77-117.

7. Д о м б р о в с к и й Р.Ф. Об одном классе подмногообразий многообразия почти кватернионной структуры// IX Всесоюзн. геом.конф.:Тез.сообщ.Кишинев, 1988.С.101-102.

8. О п о л ь с к а я Е.В. О нормально- оснащающем поле поверхности типа III в многообразии почти контактной структуры// IX Всесоюз.геом.конф.:Тез.сообщ.Кишинев, 1988.С.231-232.

УДК 514.76

РАССЛОЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ f-СТРУКТУРЫ

Н.Д. П о л я к о в
(Чувашский пед.ин-т)

I. Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞. Локальные координаты текущей точки x некоторой окрестности $U\subset M$ обозначим x^J $(J, \mathcal{J}=1,\dots,n)$. Известно [1], что на M возникает бесконечная последовательность линейных дифференциальных форм $\omega^J, \omega^J_K, \dots$, симметричных по нижним индексам и имеющих расслоенную структуру по базовым формам ω^J:

$$d\omega^J=\omega^{\mathcal J}\wedge\omega^J_{\mathcal J},\qquad d\omega^J_K=\omega^{\mathcal J}_K\wedge\omega^J_{\mathcal J}+\omega^{\mathcal J}\wedge\omega^J_{K\mathcal J},\ \dots,\tag{I}$$

формы $\bar\omega^J_{\mathcal J}=\omega^J_{\mathcal J}\big|_{\omega^K=0}$ образуют совокупность инвариантных форм группы Ли $\mathcal{D}^1_n$-группы, представленной как группа преобразований векторного репера $\vec e_J$ в касательной плоскости $T_x(M)$, т.е. $\delta\vec e_J=\bar\omega^{\mathcal J}_J\vec e_{\mathcal J}$.

Пусть на M задана f-структура ранга r со структурным объектом f: $f^3+f=0$. Ранг r постоянен на M и $0<r=2q<n$. Дифференциальные уравнения поля объекта $\{f^J_{\mathcal J}\}$ имеют следующий вид:

$$df^J_{\mathcal J}-f^J_K\omega^K_{\mathcal J}+f^K_{\mathcal J}\omega^J_K=f^J_{\mathcal J K}\omega^K.\tag{2}$$

Известно, что f-структура ранга r на M порождает π-структуру, определенную распределениями линейных элементов η и ξ, причем в каждой точке $x\in M$ справедливо: I) $\dim\eta_x=r$, $\dim\xi_x=n-r=m$; 2) $\operatorname{Im}f_x=\eta_x$, $\operatorname{Ker}f_x=\xi_x$. Пусть элемент распределения η натянут на r линейно независимых векторов $\vec H_i=H^J_i\vec e_J$ $(i,j,\dots=1,\dots,r)$, а элемент распределения ξ -на m линейно независимых векторов $\vec V_\alpha=\xi^J_\alpha\vec e_J$ $(\alpha,\beta,\dots=r+1,\dots,n)$. Охват компонент объектов $\{H^J_i\}$, $\{\xi^J_\alpha\}$ и их дифференциальные уравнения приведены в работе автора ([2], §I, п.3). Дифференциальные уравнения распределений η и ξ имеют соответственно вид:

$$dH^J_i-H^J_j\theta^j_i+H^{\mathcal J}_i\omega^J_{\mathcal J}=H^J_{iK}\omega^K,\tag{3}$$

$$d\xi^J_\alpha-\xi^J_\beta\vartheta^\beta_\alpha+\xi^{\mathcal J}_\alpha\omega^J_{\mathcal J}=\xi^J_{\alpha K}\omega^K.\tag{4}$$

Формы $\bar\theta^i_j=\theta^i_j\big|_{\omega^K=0}$ являются инвариантными формами полной линейной группы $GL(r,R)$ и $\delta\vec H_i=\bar\theta^j_i\vec H_j$, а формы $\bar\vartheta^\beta_\alpha=\vartheta^\beta_\alpha\big|_{\omega^K=0}$-инвариантные формы группы $GL(m,R)$ и $\delta\vec V_\alpha=\bar\vartheta^\beta_\alpha\vec V_\beta$.

Векторы $\{\vec{H}_i, \vec{V}_\alpha\}$ определяют репер в $T_x(M)$, и, следовательно, можно ввести обращенные объекты h^i_J, η^α_J:

$$H^J_i h^j_J = \delta^j_i, \quad \xi^J_\alpha \eta^\beta_J = \delta^\beta_\alpha, \quad H^J_i \eta^\alpha_J = 0,$$
$$\xi^J_\alpha h^i_J = 0, \quad H^J_i h^i_K + \xi^J_\alpha \eta^\alpha_K = \delta^J_K. \qquad (5)$$

Дифференциальные уравнения полей введенных объектов имеют вид:

$$dh^i_J - h^i_K \omega^K_J + h^j_J \theta^i_j = h^i_{JK} \omega^K, \qquad (6)$$
$$d\eta^\alpha_J - \eta^\alpha_K \omega^K_J + h^\beta_J \vartheta^\alpha_\beta = \eta^\alpha_{JK} \omega^K. \qquad (7)$$

Поля геометрических объектов f, ξ, η определяют на M $(f\xi\eta\rho)$-структуру коранга 0 [2]:

$$\begin{cases} f^J_K f^K_x = -\delta^J_x + \xi^J_\alpha \eta^\alpha_x, & f^J_K \xi^K_\alpha = 0, \\ f^J_K \eta^\alpha_J = 0, & \xi^J_\alpha \eta^\beta_J = \delta^\beta_\alpha. \end{cases} \qquad (8)$$

2. Известно (см. [2]), что распределение линейных элементов ξ на M интегрируемо, если выполнены условия:

$$\tau^J_{\alpha\beta} = \xi^J_{\alpha K} \xi^K_\beta - \xi^J_{\beta K} \xi^K_\alpha = 0, \qquad (9)$$

где $\tau^J_{\alpha\beta}$ – объект неголономности распределения ξ. Из (5), (9) следует

$$(h^i_{JK} - h^i_{KJ}) \xi^J_\alpha \xi^K_\beta = 0. \qquad (10)$$

В настоящей работе будем считать, что распределение ξ интегрируемо. При этом многообразие M расслаивается на r-параметрическое семейство m-мерных поверхностей $\tilde{M}$ и в каждой точке $x \in \tilde{M}$: $T_x(\tilde{M}) = \xi_x$. Поверхность $\tilde{M}$ этого семейства будем называть листом голономного распределения ξ. Обозначим координаты текущей точки y листа $\tilde{M}$ через y^α. В этом случае формы $\vartheta^\alpha = a^\alpha_\beta dy^\beta$ $(\det \| a^\alpha_\beta \| \neq 0)$ подчинены уравнениям $d\vartheta^\alpha = \vartheta^\beta \wedge \vartheta^\alpha_\beta$ и являются структурными формами поверхности $\tilde{M}$. Дифференциальные уравнения поверхности $\tilde{M}$ в M имеют вид:

$$\omega^J = \xi^J_\alpha \vartheta^\alpha.$$

3. Введем в рассмотрение r линейных линейно независимых форм:

$$\theta^i = h^i_J \omega^J. \qquad (11)$$

Формы $\{\theta^i, \vartheta^\alpha\}$ являются базисными формами на многообразии M. При этом на M справедливо:

$$\omega^J = \xi^J_\alpha \vartheta^\alpha + H^J_i \theta^i. \qquad (12)$$

Система форм θ^i образует вполне интегрируемую систему в силу условий (10). Первые интегралы z^i вполне интегрируемой системы форм θ^i можно рассмотреть как абсолютные координаты некоторого геометрического объекта (точки). Этот геометрический объект является образующим объектом m-мерного дифференцируемого многообразия $\tilde{M}$. Текущую точку многообразия $\tilde{M}$ обозначим $z = \{z^i\}$. При этом $\theta^i = b^i_j dz^j$ $(\det \| b^i_j \| \neq 0)$.

Таким образом, если распределение m-мерных линейных элементов f-структуры ранга r на M интегрируемо, то естественным образом возникает субмерсия $\pi: M \to \tilde{M}$, определенная формулами $z^i = z^i(x^J)$. Уравнения (11) являются дифференциальными уравнениями этой субмерсии. Следовательно, дифференцируемое многообразие M можно интерпретировать как присоединенное расслоенное многообразие, базой которого является многообразие $\tilde{M}$, слоями – m-мерные листы голономного распределения ξ, а структурной группой – полная линейная группа $GL(m, R)$. В этом случае вертикальным распределением расслоенного пространства M является распределение ξ, а горизонтальным распределением – распределение η. Из (11) следует, что при субмерсии $\pi: M \to \tilde{M}$ каждый лист $\tilde{M}$ распределения ξ отображается в точку $z \in \tilde{M}$.

4. В геометрии известно понятие проектируемости тензорных полей, заданных на расслоенном многообразии M (см. напр. [4], [3]). Функция $\varphi(x^J)$ на M называется проектируемой, если она может быть представлена в виде $\varphi = \tilde{\varphi}\pi$, где $\tilde{\varphi}$ – некоторая функция на базе $\tilde{M}$. Проектируемая функция характеризуется тем, что она постоянна на слоях. Векторное поле $\vec{A} = A^J \vec{e}_J$ на M называется проектируемым, если существует векторное поле $\vec{a} = \pi_* \vec{A}$ на $\tilde{M}$ (π_* – дифференциал отображения π). Во множестве реперов в $T_x(M)$ известен класс проектируемых реперов [3]. Будем считать, что репер $R(\vec{H}_i, \vec{V}_\alpha)$ является проектируемым репером. В этом случае инвариантные формы группы $GL(m, R)$ зависят от базисных координат, т.е. $\bar{\theta}^i_j = \bar{\theta}^i_j(z^k)$. Тензорное поле называется проектируемым, если его значения на произвольных проектируемых аргументах являются проектируемыми функциями [3]. В частности, аффинор f^J_K структурного объекта f-структуры на M проектируемый, если функции

$$\psi^i_j = h^i_J f^J_K H^K_j \qquad (13)$$

являются проектируемыми, т.е. $\psi^i_{jL} \xi^L_\alpha = 0$, где функции ψ^i_{jL} получены из дифференциальных уравнений

$$d\psi^i_j - \psi^i_k \theta^k_j + \psi^k_j \theta^i_k = \psi^i_{jL} \omega^L = \psi^i_{jL} \xi^L_\alpha \vartheta^\alpha + \psi^i_{jL} H^L_k \theta^k. \qquad (14)$$

Пусть $\tilde{f}=\{\psi^i_j\}$ является проекцией тензора f из M на $\tilde{M}$. При этом $\pi_* f=\tilde{f}\pi_*$. Из (I3) следует, что $\tilde{f}^2=-\tilde{I}$. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а I. Если распределение m-мерных линейных элементов ξ f-структуры ранга r интегрируемо на дифференцируемом многообразии M, то M является присоединенным расслоенным многообразием, база которого снабжена почти комплексной структурой со структурным объектом $\tilde{f}$, являющимся проекцией тензора f.

Если на M задана риманова метрика G, согласованная с f-структурой

$$G_{ji} f^j_i f^j_k = G_{ik} \tag{I5}$$

и проектируемая на $\tilde{M}$, то база $\tilde{M}$ снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными тензорами $\tilde{f}$, $\tilde{G}$, где $\tilde{G}$ - проекция тензора G. Субмерсия $\pi: M\to\tilde{M}$ является при этом римановой субмерсией [4]. Следовательно, справедлива

Т е о р е м а 2. Если распределение m-мерных линейных элементов ξ метрической f-структуры ранга r на M интегрируемо, то M является расслоенным римановым многообразием, база которого снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными объектами $\tilde{f}$, $\tilde{G}$, являющимися проекциями тензоров f и G соответственно.

Почти контактная структура на M является частным классом f-структуры. Для почти контактного многообразия $r=n-1$ (n-нечетное), размерность элементов распределения η равна $n-1$, а размерность элементов распределения ξ равна 1. Так как распределение одномерных линейных элементов всегда интегрируемо, то из теорем I и 2 следует справедливость следующих теорем:

Т е о р е м а 3. Почти контактное многообразие $M(f\xi\eta)$ является присоединенным расслоенным многообразием, база которого снабжена почти комплексной структурой со структурным объектом $\tilde{f}$, являющимся проекцией тензора f.

Т е о р е м а 4 [4]. Метрическое почти контактное многообразие $M(f\xi\eta G)$ является расслоенным римановым многообразием, база которого снабжена метрической почти комплексной структурой со структурными объектами $\tilde{f}$, G, являющимися проекциями тензоров f и G.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии//Тр.геметр.семинара/ВИНИТИ. М., 1966. Т.1. С.139-190.

2. П о л я к о в Н.Д. Дифференциальная геометрия многообразий f-структуры//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1983. Т.I5. С.95-I25.

3. Ш а п у к о в Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М., 1983. Т.15. С.61-93.

4. Tashiro Yoshihiro, Kim Byung Hax. Almost complex and almost contact structures in fibred Rieamannian spaces. || Hiroshima Math. J. 1988. N18. P. 161-188.

УДК 514.75

СКОМПОНОВАННЫЕ ТРЕХСОСТАВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в
(Калининградский ун-т)

Изучается специальный класс $\mathcal{H}$-распределений проективного пространства P_n [1]-скомпонованные (по терминологии А.П.Нордена [2]) трехсоставные распределения проективного пространства $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ ($r<m<n-1$). Распределение $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ имеет следующую структуру: а) оснащающее M-распределение скомпоновано из двух распределений $\mathcal{H}_r$ и $\mathcal{H}_\ell$ ($\ell=m-r$) (соответственно Λ-распределение и L-распределение); б) H-распределение скомпоновано из трех распределений $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-m-1}$, где $\mathcal{H}_{n-m-1}$-распределение - есть распределение характеристик χ_{n-m-1} (Φ-распределение) [1]. Кроме того, мы требуем, чтобы все основные структурные распределения данного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ были взаимны [3], [1]. Дано задание распределения в репере $\mathcal{R}(H)$ нулевого порядка [4] и доказана теорема существования. Выяснена аналитическая характеристика выбранного репера $\mathcal{R}(H)$, рассмотрен вопрос о голономности распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$ и найдены поля основных геометрических объектов распределения в окрестности I-го порядка. Найдены нормализации Нордена-Чакмазяна всех основных структурных распределений данного распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Построены квазинормали трех типов в различных дифференциальных окрестностях, которые затем применяются для построения нормалей распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$. Вводятся в рассмотрение фокальные образы распределения $\mathcal{H}^r_{m,n-1}$, с помощью которых выясняется геометрический смысл построенных ранее квазинормалей. Для основных структурных распределений $\mathcal{H}_r$, $\mathcal{H}_\ell$, $\mathcal{H}_{n-1}$ введены оснащения в смысле Э.Картана.